تعريف :

لتكن A حلقة جزئية في الحلقة R ، B ، D مجموعات جزئية
في A ، نسمي المجموعة

$$[B,D] = \{[b,d] ; b \in B, d \in D\}$$

حدة المجموعة بين B, D في A.

+ قضية :

لتكن A حلقة جبرية في الحلقة R ، ولتكن B ، D ، K
مجموعات جزئية فيها ، عندئذ K نقيم :

$$\underline{1}. \qquad [B,D] = [D,B]$$
$$\underline{2}. \qquad [B+D,K] = [B,K] + [D,K]$$
$$\underline{3}. \qquad [B,[K,D]] \subseteq [D,[B,K]] + [K,[D,B]]$$
$$\underline{4}. \qquad [B \cap K, D] \subseteq [B,D] \cap [K,D]$$

البرهان :

$\underline{1}.$ لتكن $x \in [B,D]$ عندئذ نجد :

$$x = [b,d] ; b \in B, d \in D$$

$$x = [b,d] = -[d,b] = [-d,b] \in [D,B]$$

$$\Rightarrow [B,D] \subseteq [D,B]$$

بنفس الطريقة نثبت العلاقة الأخرى ومنه المطلوب .

$\underline{2}.$ لتكن $y \in [B+D,K]$ عندئذ نجد :

$$y = [a,K] ; a \in B+D , k \in K$$

$$a = b+d ; b \in B, d \in D$$

$$\Rightarrow y = [a,K] = [b+d,K]$$

$$= [b,K] + [d,K] \in [B,K] + [D,K]$$

$$\Rightarrow [B+D, K] \subseteq [B, K] + [D, K] \quad \text{(1)}$$

$$\because z \in [B, K] + [D, K]$$

$$z = b_1 + b_2 \quad ; \quad b_1 \in [B, K] \ , \ b_2 \in [D, K]$$

$$\Rightarrow b_1 = [b, K_1] \ , \ b_2 = [d, K_2] \ ; \ b \in B \ , \ d \in D$$
$$K_1, K_2 \in K$$

$$z = b_1 + b_2 = [b, K_1] + [d, K_2] =$$

$$= [b, K_1] + [d, K_1] - [d, K_1] + [d, K_2]$$
$$= [b+d, K_1] + [d, K_2 - K_1]$$
$$\in [B+D, K] + [D, K]$$

$$\Leftarrow [D, K] \subseteq [B+D, K]$$
$$[B+D, K] + [D, K] = [B+D, K]$$

$$\Rightarrow [B+D, K] \supseteq [B, K] + [D, K] \quad \text{(2)}$$

من (1) و (2)

$$x \in [a, b] \qquad x \in [B, [K, D]]$$

$$a \in B \ , \ b \in [K, D]$$

$$b = [K, d] \ ; \quad K \in K \ ; \ d \in D$$

$$2. [a, b] = [a, [K, d]] = -[K, [d, a]] - [d, [a, K]]$$

$$\in [K, [D, B]] + [D, [B, K]]$$

الموضوع : ....

* تمهيد :

ليكن A حبري او حوقت الحلقت التبادلية والواحدية $\longrightarrow R$
وليكن I, J مثاليين من A عندئذ فإن كلاً من
$$I \cap J , I+J$$
مثالي في A

البرهان :

- نعلم أن كلاً من $I \cap J$ ، $I+J$ هو مجرد جزئين من A
  ليكن $a \in A$ وليكن :
  $\circledcirc$ $x \in I \cap J$ عندئذ فإن
  $$d_{a,x} = d[a,x] \in I \quad ; \quad d_{a,x} = [a,x] \in J$$

  $$\Rightarrow d_{a,x} \in I \cap J$$
  $\Longleftarrow$ $I \cap J$ مثالي في A

$\circledast$ $x \in I+J$ عندئذ فإن :
  $$x = y+z \quad ; \quad y \in I \quad , \quad z \in J$$

  $$d_{a,x} = [a,x] = [a, y+z] = [a,y] + [a,z]$$

  $$= \underbrace{d_{a,y}}_{\in I} + \underbrace{d_{a,z}}_{\in J} \in I+J$$

  ومنها يبين أن $I+J$ مثالي في A

تعريف :

ليكن A حبري فوق الحلقت R و I, J مثاليين في A
لنأخذ المجموعة
$$\mathcal{L} = \{ [a,b] ; a \in I , b \in J \}$$
نسمي أصغر مجرد جزئين من A يحوي المجموعة $\mathcal{L}$

باعتبار المجموعة الجزئية المولدة من طرف L ونرمز بـ $[I,J]$

. وهي أصغر مجال جزئي من A يحوي L

. وبالتالي نقاطع جميع المجالات الجزئية من A والتي تحوي L

تعريف: ليكن A حلقة و مثاليين R، I، J الأيسر
منها، عندئذ:

$$[I,J] = [J,I] \quad -1$$

$$[I,J] \text{ مثالي في } A \quad -2$$

البرهان:

1- لنعرّف أن $L_1 = \{[a,b] ;\ a\in I, b\in J\}$

. المجموعة المولدة للمثالي $[I,J]$

و $L_2 = \{[d,c] ;\ d\in J, c\in I\}$

. المجموعة المولدة للمثالي $[J,I]$

ليكن $x\in L_1$ عندئذ حيث: $x=[a,b] ;\ a\in I, b\in J$

عندئذ:

$$x=[a,b] = -[b,d] = [b,d] \in L_2$$

$$\Leftarrow L_1 \subseteq L_2$$

وبنفس الطريقة نثبت أن $L_2 \subseteq L_1$ وبالتالي

$$L_2 = L_1$$

. وهذا يبين أن المثالي $[J,I] = $ المثالي $[I,J]$

2- إن $[J,I]$ حسب التعريف مثالي جزئي في A

ليكن $a\in A$ ، $x\in L_1$ عندئذ حيث:

$$x=[y,z] ;\ y\in I, z\in J$$

$$\Rightarrow d_a(x) = d_a[a,x] = [a,[y,z]]$$

$$= -[y,[z,a]] - [z,[a,y]]$$

$$= [y, [a,z]] - [z, [a,y]] = [y, d_a(z)] - [z, d_a(y)]$$

$$= [y, d_a(z)] + [d_a y, z] \in [I,J]$$

تبيّن لدينا عبر العمود الحرف ؟

$$d_a(d_1) \subset [I,J] \quad \text{ومنه استنتجنا أن}$$

$$\Rightarrow d_a([I,J]) \subset [I,J]$$

ومنه استنتج أن A مثالي في $[I,J]$.

★ تعريف : ليكن A جبر بوش الحلقة R ، I محور
جزئي تعريف حالتي في A نقول أن I مثالي تمييزي في A
إذا كان :

1. I جدول حزئي في A

2. $D(I) \subset I \; ; \; \forall D \in Der(A)$

ينتج من التعريف مباشرة أن كل مثالي تمييزي A هو مثالي في A .

تعريف : ليكن A جبر بوش الحلقة R ، جداء مثاليين
تمييزين في A هو مثالي تمييزي في A .

البرهان :
ليكن A , I , J مثاليين تمييزين في A
بأنة المجموعة :

$$\mathcal{L} = \{ [a,b] \; ; \; a \in I , b \in J \}$$

ونأخذ المولد الخطي $[I,J]$ المولد للمجموعة $\mathcal{L}$

ليكن $D \in Der(A)$ ، $x \in \mathcal{L}$

$$x = [a,b] \; ; \; a \in I , b \in J$$

ومن :

$$\Phi(x) = D[a,b] = [Da, b] + [a, Db]$$

$$\in [I, J]$$

$$D([I, J]) \subseteq [I, J]$$

وبالتالي فإن طوبولوجي $[I, J]$ مثالي محزري في A

تعريف: لتكن A جبري فوق الحلقة R سمي المجموعة

$$Z(A) = \{ a ; a \in A ; [a, x] = 0 ; \forall x \in A \}$$

مركز الجبر A

تمهيد: لتكن A جبري فوق الحلقات R فإن مركز الجبر A ، $Z(A)$ هو مثالي محزري في A.

البرهان: واضح من السابق أن $Z(G) \neq \emptyset$ لأن $0 \in Z(G)$

$$\forall \alpha, \beta \in R, a, b \in Z(A)$$

$$\forall x \in A : \quad [\alpha a + \beta b, x] = [a a, x] + [\beta b, x]$$

$$= \alpha [a, x] + \beta [b, x] = 0$$

$\Rightarrow \alpha a + \beta b \in Z(A)$ أي أن $(Z(A), +)$ مردود جبرزئي

ليكن $D \in Den A$ ، $z \in Z(A)$ عندئذ لأي $x \in A$ فإن $x \in A$

$$D([a, x]) = [D(a), x] + [a, Da]$$

$$\Rightarrow [Da, x] = [a, \underset{A}{Dx}] - \underset{0}{D([a,x])} = 0$$

وبالتالي فإن $Da \in Z(A)$ ومنه يتبين أن $Z(A)$

مثالي محزري في A

الموضوع : ....

حلقة الخارج

ليكن A حلقة تبديلية، الحلقات R و I مثاليات A، لنعرف على A علاقة ρ بالشكل الآتي :

$$\forall x,y \in A: \quad x\rho y \Longleftrightarrow x-y \in I$$

فنجد أن ρ هي علاقة تكافؤ على A.

- لنرمز لصنف التكافؤ المولد بالعنصر $a \in A$

$$\bar{a} = a+I = \{x ; x \in A, x\rho a\}$$

- ولنرمز لمجموعة صفوف التكافؤ للعلاقة ρ بالشكل

$$A/I = \{\bar{a} = a+I ; a \in A\}$$

لنعرف على مجموعة الصفوف A/I العمليات الآتية :

$$\forall a+I, b+I \in A/I \quad , \quad \forall \alpha \in R$$

- بجمع الصفوف $(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$

- ضرب الصفوف $[a+I].[b+I] = [a,b] + I$

- تأثير $\alpha(a+I) = \alpha a + I$

أصبحت A/I بالنسبة للعمليات السابقة تشكل حلقة فوق R.

- تعريف :

كل مثالي في A هو نواة تشاكل حلقي لي غامر.

البرهان :

ليكن B مثالي A عندئذ A/B حلقي. لتكن العلاقة

$$f: A \longrightarrow A/B$$

$$x \longmapsto x + B$$

ـ هي تثبت أن f تشاكل

ـ و هو تشاكل حيث $\forall x, y \in A$

• $f(x+y) = (x+y) + B = (x+B) + (y+B) = f_{(x)} + f_{(y)}$

• $f([x,y]) = [x,y] + B = [x+B, y+B] = [f_{(x)}, f_{(y)}]$

• $\forall \alpha \in R ; f(\alpha x) = \alpha x + B = \alpha(x+B) = \alpha f_{(x)}$

ـ $\forall \overline{a} \in A/B ; \overline{a} = a + B ; a \in A$

$$f_{(a)} = a + B = \overline{a}$$

. لنبرهن أن $B = \operatorname{Ker} f$ ليكن $b \in B$ عندئذ :

$$\overline{b} = b + B = B$$

$$f(b) = (b+B) = B \implies b \in \operatorname{Ker} f$$

$$B \subseteq \operatorname{Ker} f$$

. x احتواء المماثلين بنفس الاسلوب

. ينتج أن $B = \operatorname{Ker} f$ و هو المطلوب

كل مثالي في حيري هو حير في حيري

البرهان:

. ليكن A حيري بوحدة I , R مثالي في A ،

. أي أن I اسوا و حيري في A

ـ ليكن $I \ni ab$ عندئذ . $[a,b] = d_{ab} \doteq d_{ab} \in I$

I

. إذا I حيري حري ذيري

تمرين: ليكن $A \longrightarrow A'$ تشاكل جمر لي ونقول أن
φ تعاكل أو إيزومرفيزم إذا كان φ متباين ودغامر
ومن أجل ذلك $A \cong A'$

تمرين: ليكن φ $A \longrightarrow A'$ تشاكل جمر لي عند ث ...
أثبت أن تشاكل بين A و A' فإن $Ker \varphi$ جزئرث من A

مبرهنة التشاكل الأولى:
ليكن φ $A \longrightarrow A'$ تشاكل جمر لي
عند ث : $A/Ker(\varphi)$ $\cong$ $Im(\varphi)$
عاص : فإن A' $A/Ker \varphi$ $\cong A'$

مبرهنة: ليكن A جمر لي ليكن Z الزمرة R عند ث
$A/Z(A) \cong Inn A$

البرهان:
بما أن $A/Z(A)$ تشاكل A فإن $A/Z(A)$ جمر لي
وحسبنا سابقا أن $Inn(A)$ تشاكل من جمر لي $Der A$
وبالتالي فإن $Inn(A)$ جمر لي جزئرث من $Der A$
أي أن $Inn A$ جمر لي
وأيضا وحسبنا سابقا التطبيق $A \longrightarrow Der(A)$ المعرف بالشكل
      $\forall a \in A$ $\varphi_a = da$
هو تشاكل جمر لي ... ونبين أنه تطبيق دغامر ...
وبالتالي فإن $A \longrightarrow Inn A$ هو تشاكل جمر لي وهو
      عاص $\varphi_a = da$
خبر إذا كان $d \in Inn A$ فإن $A \in A$ بالتالي $\varphi_a(d)$
ومنه حسب مبرهنة التشاكل الأولى :
      $A/Ker \varphi = Inn A$

لنبرهن على أن $Ker\psi = Z(G)$

$a \in Ker\psi$; $\psi_{(a)} = d_a$

$\Rightarrow \psi_{(a)} = d_o$

$\Rightarrow d_a = d_o$

$\forall x \in A$; $d_a(x) = d_o(x) = 0 \Rightarrow [a,x] = 0$

$\Rightarrow a \in Z(A)$

$\Rightarrow Ker\psi \subseteq Z(G)$

ليكن $b \in Z(G)$ عندئذ :

$\forall x \in A$; $[b,x] = 0 \Rightarrow d_b(x) = 0 = d_o(x)$

$\Leftarrow$ $d_b = d_o$ $\Rightarrow d_b = d_o = \psi(b) = d_b = d_o$

إذن $b \in Ker\psi \Rightarrow Z(A) \subseteq Ker\psi$

$\Leftarrow Z(A) = Ker\psi$

انتهت الحمد لله